$$(V_n - U_n)V_n = V_n^2 - U_nV_n$$
$$= \frac{1}{4}(U_{n-1} + V_{n-1})^2 - U_{n-1}V_{n-1}$$
$$= \frac{1}{4}\left[(U_{n-1} + V_{n-1})^2 - 4U_{n-1}V_{n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1}^2 + 2U_{n-1}V_{n-1} + V_{n-1}^2 - 4U_{n-1}V_{n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[U_{n-1}^2 - 2U_{n-1}V_{n-1} + V_{n-1}^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}[U_{n-1} - V_{n-1}]^2$$

Donc $V_n(V_n - U_n) = \frac{1}{4}(U_{n-1} - V_{n-1})^2 \geq 0$

Et comme $V_n \geq 0$ on aura $V_n - U_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*$

et comme $V_0 > U_0$ il résulte: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : U_n < V_n}$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

*/ $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n$
$$= \frac{1}{2}(U_n + V_n - 2V_n)$$
$$= \frac{1}{2}(U_n - V_n) \leq 0$$

Car $U_n < V_n$ donc la suite (V_n) est décroissante.

*/ $\forall n \in \mathbb{N}$ on sait que $V_{n+1} \leq V_n$

Donc $V_{n+1}U_n \leq U_nV_n$ car $U_n \geq 0$

et puisque $V_nU_n = U_{n+1}V_n$

On aura $V_{n+1}U_n \leq U_nV_n$

D'où $V_{n+1}U_{n+1} - U_nV_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow V_{n+1}(U_{n+1} - U_n) \geq 0$

et $V_{n+1} > 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ce qui prouve que la suite (U_n) est croissante.

3)*/ Convergence de (V_n) : on a:

$\forall n \in \mathbb{N} : V_n > U_n$

et la suite (U_n) est croissante

Donc $U_n > U_0$ d'où $V_n > U_0$

(V_n) est une suite décroissante et minorée par V_0 donc (V_n) est convergente.

*/ Convergence de (U_n) :

(V_n) est décroissante donc majorée par son premier terme c'est-à-dire $V_n < V_0$ et $U_n < V_n$

Donc : $U_n < V_0$ donc (U_n) est croissante et majorée par V_0 donc c'est une suite convergente.

4) a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V_n - U_n = \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1}) - U_n$
$$= \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n)$$

Et puisque $U_n > U_{n-1}$ donc $-2U_n < -2U_{n-1}$

Donc $V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n < V_{n-1} + U_{n-1} - 2U_n$

Par suite $V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} - U_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$

"Multiplions membre à membre "

$$\begin{cases} 0 < V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} + U_{n-1}) \\ \times\ 0 < V_{n-1} + U_{n-1} < \frac{1}{2}(V_{n-2} - U_{n-2}) \\ \times\ 0 < V_{n-2} + U_{n-2} < \frac{1}{2}(V_{n-3} + U_{n-3}) \\ \times\ \vdots \\ 0 < V_1 + U_1 < \frac{1}{2}(V_0 - U_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$$

b/ $\Leftrightarrow 0 \leq V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$ et

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0) = 0$ donc : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0}$

On a : $\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$ et

(U_n) et (V_n) sont convergentes donc

$\lim_{n \to +\infty} V_n - \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

c/ on sait que $\forall n \in \mathbb{N} : U_nV_n = U_0V_0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} U_nV_n = U_0V_0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n^2 = U_0V_0$

et $U_n > 0$ d'où :

Oarray.tn -Aqra Blech- Oarray.tn